

Modelo Matemático e Controle de um Robô Móvel

1. Introdução

Nesta aula serão apresentadas leis de controle que permitem a um robô móvel não-holonômico navegar de maneira coordenada desde uma localização de origem até uma localização final em um ambiente. Serão apresentados os modelos cinemáticos e dinâmicos que permitem a descrição do sistema de controle.

2. Modelo cinemático

Neste modelo o robô é considerado uma massa pontual, sem perturbações (momento de inércia e atritos). Isso torna mais simples a obtenção da velocidade (V e ω) e localização (x,y,θ) do robô em cada instante.

2.1. Modelo do motor que aciona cada roda do robô

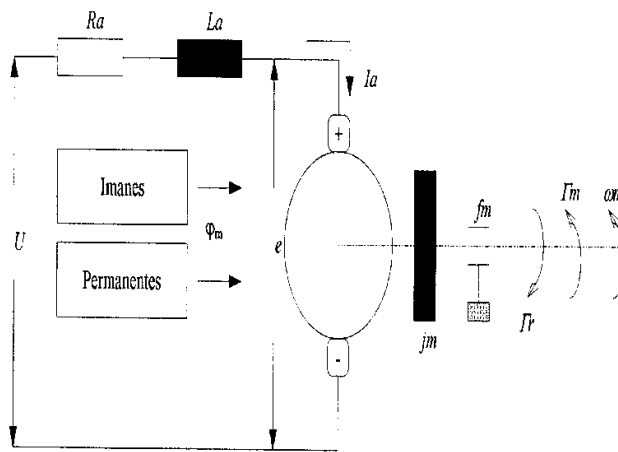


Figura 1. Parâmetros de um motor.

Do esquema mostrada na Figura 1, temos:

$$\tau_m = k_i I_a, \quad (1)$$

onde τ_m é o torque do motor, k_i é a constante de torque e I_a é a corrente na armadura do motor.

$$e = k_b \omega_m, \quad (2)$$

onde e é a força contra-eletromotriz induzida no motor, ω_m é a velocidade do eixo do motor e K_b é a constante de força contra-eletromotriz.

$$U = R_a I_a + L_a \frac{d}{dt} I_a + e, \quad (3)$$

$$j = j_m + \frac{j_L}{n^2}, \quad (4)$$

onde j é o momento de inércia do eixo do motor, j_m é o momento de inércia do conjunto motor-redução, j_L é o momento de inércia da carga e n é a redução de engrenagens.

$$J = J_m + \frac{J_L}{n^2}, \quad (5)$$

onde J é o coeficiente de atrito viscoso, J_m é o coeficiente de atrito viscoso do conjunto motor-redução, J_L é o coeficiente de atrito viscoso da carga, e n é a redução de engrenagens.

Equação de equilíbrio:

$$\tau_m - \tau_r = j\dot{\omega}_m + J\omega_m, \quad (6)$$

Sabemos que, $\tau_m = k_i I_a$, assim:

$$j \frac{d}{dt} \omega_m + J\omega_m + \tau_r = K_i I_a \quad (7)$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$K_b \omega_m(S) = e(S) \quad (8)$$

$$(L_a S + R_a) I_a(S) + e(S) = U(S) \quad (9)$$

$$(jS + J)\omega_m(S) + \tau_r(S) = K_i I_a(S) \quad (10)$$

$$\tau_m(S) = k_i I_a(S) \quad (11)$$

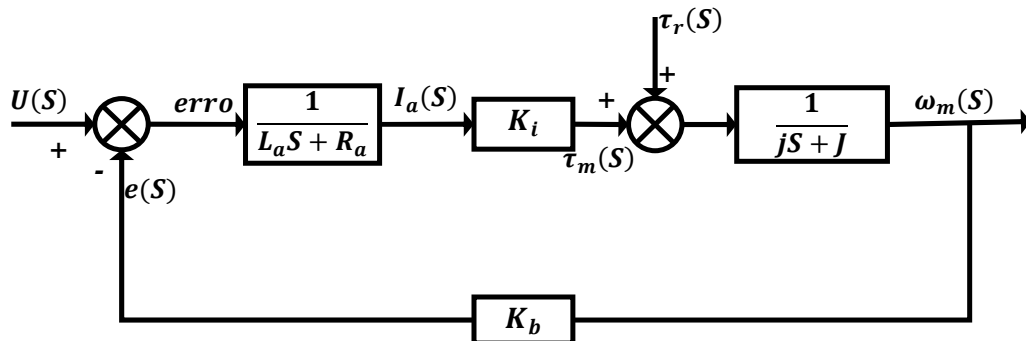


Figura 2. Diagrama de blocos do modelo do motor.

2.2. Modelo de redução de engrenagens do motor

$$\omega_R = \frac{\omega_m}{n} \quad (12)$$

2.3. Modelo da roda do robô

$$V_o = V_t = \omega_R r_R \quad (13)$$

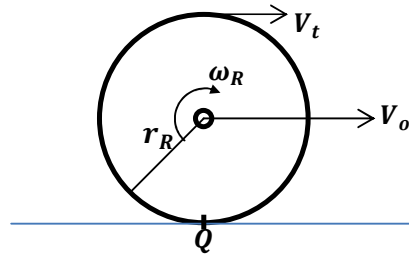


Figura 3. Modelo da roda.

2.4. Estrutura mecânica do robô

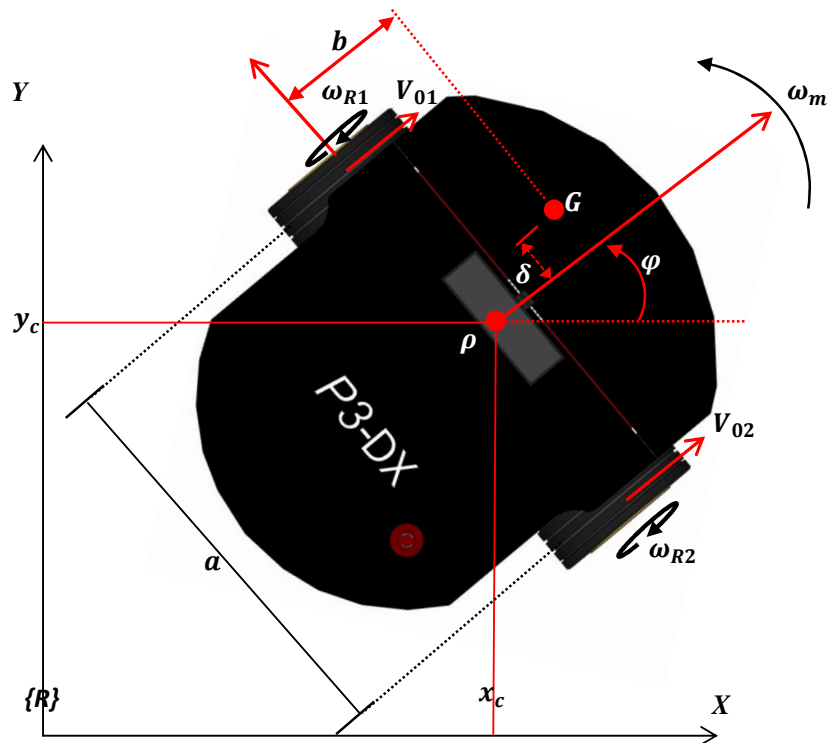


Figura 4. Modelo do robô.

2.5. Descrição do modelo cinemático

A velocidade final de avanço do robô é a velocidade do ponto ρ .

$$V = \frac{V_{o1} + V_{o2}}{2} \quad (14)$$

$$\omega = \frac{V_{o2} - V_{o1}}{a}, \quad (15)$$

onde a é a distância entre as rodas esquerda e direita (rodas 1 e 2, respectivamente).

Considerado o robô posicionado a uma distância e ângulo qualquer com relação a um referencial inercial $\{R\}$, temos:

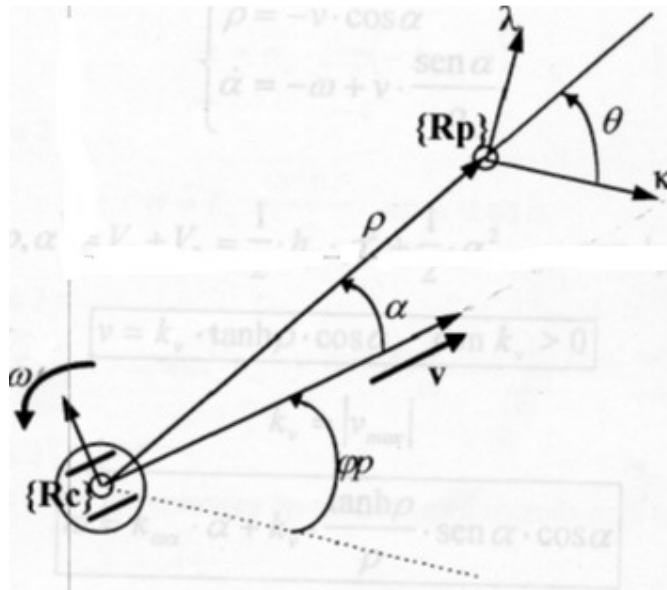


Figura 5. Modelo do sistema.

$$\dot{X}_c = V \cos(\varphi), \quad (16)$$

$$\dot{Y}_c = V \sin(\varphi), \quad (17)$$

$$\dot{\varphi}_c = \omega, \quad (18)$$

Considerando o robô posicionado a uma distância diferente de zero com relação a um referencial destino $\{R_p\}$, as equações cinemáticas para a sua posição K_e , e λ_e , e para a sua orientação φ_p são:

$$\dot{K}_c = V \cos(\varphi_p), \quad (19)$$

$$\dot{\lambda}_c = V \text{sen}(\varphi_p), \quad (20)$$

$$\dot{\varphi}_p = \omega, \quad (21)$$

$$\dot{\rho} = -V \text{cos}(\theta - \varphi_p), \quad (22)$$

$$\dot{\theta} = V \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho}, \quad (23)$$

$$\dot{\varphi}_p = \omega, \quad (24)$$

Como $\alpha = \theta - \varphi_p$, então $\dot{\alpha} = \dot{\theta} - \dot{\varphi}_p = \dot{\theta} - \omega$, assim:

$$\dot{\alpha} = -\omega + \frac{V \text{sen} \alpha}{\rho}, \quad (25)$$

$$\dot{\rho} = -V \text{cos} \alpha, \quad (26)$$

$$\dot{\theta} = V \frac{\text{sen}(\alpha)}{\rho}, \quad (27)$$

Para $\rho \neq 0$.

3. Modelo dinâmico do robô móvel

Consideram-se agora os efeitos produzidos pela massa do robô, incorporando momento de inércia, atrito e outras perturbações derivados desses efeitos.

3.1. Sistema elétrico:

$$\tau_R = \tau_m - \tau \quad (25)$$

$$\tau_m(S) = K_i \frac{(U - K_b \omega_m)}{(R_a + L_a S)} \quad (26)$$

$$\tau = (jS + J) \omega_m \quad (27)$$

$$\tau_R = \frac{K_i}{(R_a + L_a S)} U - \frac{(R_a + L_a S)(jS + J) + K_i K_b}{(R_a + L_a S)} \omega_m \quad (28)$$

3.2.Sistema mecânico

Considera-se o robô como um corpo rígido (desconsiderando as massas das rodas). O ponto G , de coordenadas (b, δ) indica o centro de gravidade do robô, e o ponto ρ , de coordenadas (x_c, y_c) indica o centro de rotação do robô. Assim:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_{R1} - \omega_{R2}}{a} r_r, \quad (29)$$

$$\frac{dx}{dt} = r_r \frac{\omega_{R1} + \omega_{R2}}{2} \cos\varphi, \quad (30)$$

$$\frac{dy}{dt} = r_r \frac{\omega_{R1} + \omega_{R2}}{2} \sin\varphi, \quad (31)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \quad (32)$$

onde σ é a abscissa curvilínea, e:

$$V = \frac{d\sigma}{dt} \hat{e}. \quad (33)$$

A velocidade no ponto G é:

$$V_G = V + \omega \hat{k} \times (b \hat{l} + \delta \hat{n}) \quad (34)$$

$$V_G = \left(\frac{d\sigma}{dt} - \delta \frac{d\varphi}{dt}\right) \hat{l} + b \frac{d\varphi}{dt} \hat{n} \quad (35)$$

3.3.Descrição do modelo dinâmico

Para obter a dinâmica do robô, podem-se utilizar as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \Gamma_j, \quad (36)$$

onde L é o Lagrangiano do sistema, dado por:

$$L = \varepsilon_c - \varepsilon_p, \quad (37)$$

ε_c é a energia cinética, ε_p é a energia potencial, Γ representa as forças generalizadas (força ou torque) e q_j é a i -ésima coordenada generalizada.

A energia cinética do robô é:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (38)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - m\delta \frac{d\sigma}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2}(I + \delta^2 + mb^2) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (39)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - 2\delta \frac{d\sigma}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \delta^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + b^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2b \left(\frac{d\sigma}{dt} - \delta \frac{d\varphi}{dt}\right) \frac{d\varphi}{dt}\right] + \frac{1}{2}I \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (40)$$

onde m é a massa do robô e I é o momento de inércia do ponto G .

Aplicando as relações de Euler-Lagrange, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{V}} \varepsilon_c \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \varepsilon_c = m \frac{d^2}{dt^2} \sigma - m\delta \frac{d^2}{dt^2} \varphi = (J_{c_1} + J_{c_2}) \hat{l}, \quad (41)$$

onde J_{c_1} e J_{c_2} são as forças transmitidas ao robô pelo contato entre as rodas e o solo.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\omega}} \varepsilon_c \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \varepsilon_c = [m(\delta^2 + b^2) + I] \frac{d^2}{dt^2} \varphi - \delta m \frac{d^2}{dt^2} \sigma = a(J_{c_2} + J_{c_1}) \hat{l} \quad (42)$$

O torque de reação de cada roda é dada por:

$$\begin{cases} T_{r_1} = J_{c_1} \cdot r_l \\ T_{r_2} = J_{c_2} \cdot r_r \end{cases} \quad (43)$$

3.4. Modelo do sistema

Das equações anteriores, temos que:

$$J_{c_1} = \frac{K_i}{(R_a + L_a S) r_r} V_1 - \frac{(R_a + L_a S)(jS + J) + K_i K_b}{(R_a + L_a S) r_r} n \omega_{r_1} \quad (44)$$

$$J_{c_2} = \frac{K_i}{(R_a + L_a S) r_r} V_2 - \frac{(R_a + L_a S)(jS + J) + K_i K_b}{(R_a + L_a S) r_r} n \omega_{r_2}. \quad (45)$$

Substituindo agora J_{c_1} e J_{c_2} nas equações de Euler-Lagrange, temos:

$$\begin{cases} \frac{d^3 \sigma}{dt^3} + c_1 \frac{d^2 \sigma}{dt^2} + c_2 \frac{d\sigma}{dt} + c_3 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + c_4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = c_5 (U_1 + U_2) \\ \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + c_6 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_7 \frac{d\varphi}{dt} + c_8 \frac{d^3 \sigma}{dt^3} + c_9 \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = c_{10} (U_1 + U_2) \end{cases} \quad (46)$$

Pode-se então obter V e ω a cada instante.

4. Análise de estabilidade de um robô móvel através da teoria de Lyapunov

Pretende-se demonstrar que o controlador leva assintoticamente o robô móvel a um ponto de coordenadas $\rho = 0$ e $\alpha = 0$.

Sabemos que:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -V \cos \alpha \\ \dot{\alpha} = -\omega + \frac{V \sin \alpha}{\rho} \end{cases} \quad (47)$$

Função candidata de Lyapunov ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$), mas sabendo que $\mathcal{E}_p = 0$, pois o robô somente se desloca no plano:

$$\mathcal{E}(\rho, \alpha) = \frac{1}{2} h_p \cdot \rho^2 + \frac{1}{2} \alpha^2, \quad (48)$$

onde $h_p > 0$ é constante.

$$\dot{\mathcal{E}}(\rho, \alpha) = h_p \cdot \rho \cdot \dot{\rho} + \alpha \dot{\alpha} \quad (49)$$

Substituindo (4.1) em (4.3), temos:

$$\dot{\mathcal{E}}(\rho, \alpha) = h_p \cdot \rho \cdot (-V \cos \alpha) + \alpha \cdot \left(-\omega + V \frac{\sin \alpha}{\rho}\right) \quad (50)$$

Para demonstrar que \mathcal{E} é decrescente com o tempo, ou seja, que $\dot{\mathcal{E}}$ é sempre negativo, podemos definir \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 tais que

$$\mathcal{E}_1 = h_p \cdot \rho \cdot (-V \cos \alpha) \text{ e } \mathcal{E}_2 = \alpha \cdot \left(-\omega + V \frac{\sin \alpha}{\rho}\right). \quad (51)$$

Assim, basta propor funções para \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 . Se $\mathcal{E}_1 < 0$ e $\mathcal{E}_2 < 0$, então $\dot{\mathcal{E}} < 0$. Suponha para \mathcal{E}_1 :

$$V = K_v \cdot \rho \cdot \cos \alpha, \quad (52)$$

e para \mathcal{E}_2 :

$$\omega = \alpha + K_v \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad (53)$$

para $K_v > 0$. Assim obtemos:

$$\dot{\mathcal{E}} = -h_p \cdot K_v \cdot \rho^2 \cdot \cos^2 \alpha - \alpha^2, \quad (54)$$

que está na forma definida negativa.

$\begin{cases} \rho(t) \rightarrow 0 \\ \alpha(t) \rightarrow 0 \end{cases}$ quando $t \rightarrow \infty$. Sistema assintoticamente globalmente estável.

Equações de malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -V \cos \alpha = -K_v \cdot \rho \cdot \cos^2 \alpha \\ \dot{\alpha} = -\omega + V \frac{\text{sen} \alpha}{\rho} = -\alpha \\ \dot{\theta} = V \frac{\text{sen} \alpha}{\rho} = K_v \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (55)$$

Será demonstrado que $\alpha(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Da Equação 4.4, temos que:

$$\dot{\alpha} - \alpha = 0,$$

cuja solução é:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-t}.$$

Assim, $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_0 e^{-t} = 0$.

Também da Equação 4.4, temos que:

$$\dot{\theta} = K_v \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Desenvolvendo, temos:

$$\theta(t) = \int_0^t \dot{\theta}(t) dt = \int_0^t K_v \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha dt = \int_0^t \frac{K_v}{2} \text{sen}(2\alpha) dt$$

$$\theta(t) = \frac{K_v}{2} \int_{z(\alpha_0)}^z -\frac{\text{sen} z}{z} dz$$

$$\theta(t) = \left[z - \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \frac{z^5}{5 \cdot 5!} - \frac{z^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right]_{z(\alpha_0)}^z$$

$$\theta(t) = -\frac{K_v}{2} \left[2 \cdot \alpha_0 \cdot e^{-t} - \frac{8 \cdot \alpha_0^3 \cdot e^{-3t}}{18} + \frac{32 \cdot \alpha_0^5 \cdot e^{-5t}}{600} \dots \right]_0^t$$

Para $t \rightarrow \infty$, $\theta(t) \rightarrow 0$.

Para $t \rightarrow 0$, se $\alpha_0 \ll 1$, então $\theta(t) \rightarrow -K_v \alpha_0$.

Da Figura 5, temos que $\theta = \alpha + \varphi_p$, logo:

$$\varphi_p = \theta - \alpha.$$

Para $t \rightarrow \infty$:

$$\theta \rightarrow \text{constante}$$

$$\varphi_p \rightarrow \text{constante}$$

$$\alpha \rightarrow 0$$

Note que é possível estabelecer o ângulo de chegada ao destino, θ . Nesse caso:

$$\varepsilon(\rho, \alpha, \theta) = \frac{1}{2}h_p \cdot \rho^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}h_\theta \cdot \theta^2, \quad (57)$$

Com $h_p, h_\theta > 0$, onde:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -V \cos \alpha \\ \dot{\alpha} = -\omega + V \frac{\text{sen} \alpha}{\rho} \\ \dot{\theta} = V \frac{\text{sen} \alpha}{\rho} \end{cases}$$